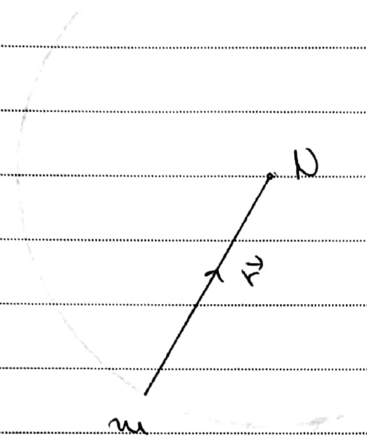
Μαθημα 8ο 21/3/2018

Κλασσικη Μηχανικη

Παραδειγμα

Οι τροχιες των πλανητων ειναι επιπεδες

Εστω λοιπον ενας πλανητης που περιστρεφεται γυρω απο τον κυκλο



Απο το νομο του Νευτωνα

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow$$

$$-G \cdot \frac{Mm}{|\vec{r}|^2}\vec{r} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{G_M}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r}}$$

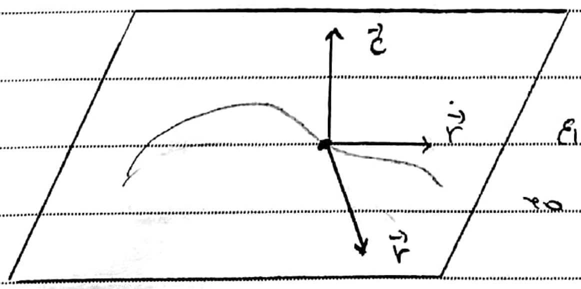
▶ Απο το νομο του Νευτωνα λοιπον συμπεραινουμε οτι τα διαστηματα $\vec{r}$ και $\ddot{\vec{r}}$ ειναι παραλληλα

Δηλαδη $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$

ομως $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Αρα $\boxed{\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}}$ δηλ. σταθερο

Συνεπως τροχια και ταχυτητα, θεση και ταχυτητα βρισκονται στο ιδιο επιπεδο καθετο στο σταθερο διανυσμα $\vec{c}$



Αποδειξαμε οτι η τροχια ειναι επιπεδη συμφωνα με το παγκοσμιο νομο της ελξης

Οι νομοι του Kepler

▲ 1ος νομος: Νομος Κωνικων Τομων

Η τροχια ενος πλανητη ειναι κωνικη τομη με τον ηλιο και μια εστια της. Η εκκεντροτητα της ειναι:

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$$

, r_0, v_0 αρχικη θεση και ταχυτητα του πλανητη και M μαζα του ηλιου

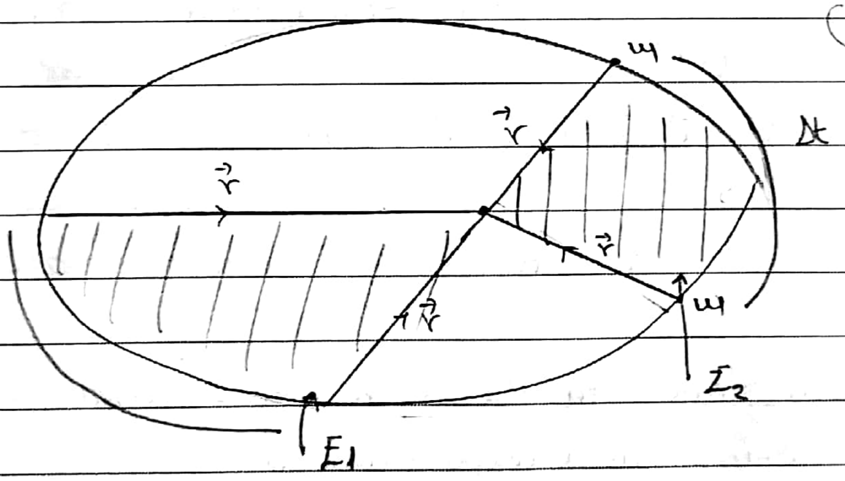
και η τροχια που ακολουθει ο πλανητης

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1 + e\cos\theta}$$

▲ 2ος νομος: Νομος ισων Εμβαδων

Το διανυσμα που συνδεει τον ηλιο με τον πλανητη σαρωνει ισα εμβαδα σε ισους χρονους

$E_1 = E_2$

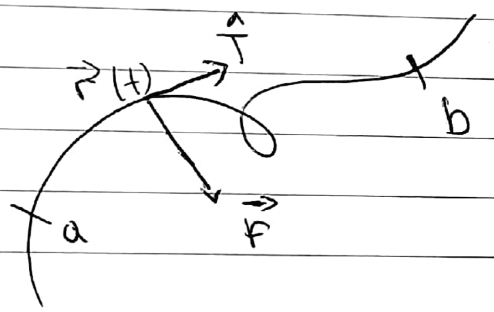


Έργο Δύναμης

<u>Ορισμός:</u> → Το έργο που εκτελείται από μια δύναμη $F = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ επί λείας καμπύλης $\vec{r}(t)$ για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $a \le t \le b$ είναι:

$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Θεωρώντας το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ και μία κίνηση στην καμπύλη $\vec{r}(t)$ τότε το έργο αντιστοιχεί στην ενέργεια που καταναλώνεται ή παράγεται για να μετακινεί το σημείο στο χρονικό διάστημα $t\in[a,b]$



$\vec{r}$ = διάνυσμα θέσης

$s = |\vec{r}| \Rightarrow \dfrac{ds}{dt} = |\vec{v}|$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Αν θεωρήσαμε $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ τότε:

$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b \vec{F}\cdot(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})\,dt = \int_a^b (M\dot{x} + N\dot{y} + P\dot{z})\,dt =$$

$$= \int_a^b (M\,dx + N\,dy + P\,dz)$$

Το επικαμπύλιο → μόνο αλλάζ. που σου δίνει μία επιπλέον πληροφορία (παίρνει την καμπύλη)

Παράδειγμα

Να βρεθεί το έργο της δύναμης $\vec{F} = (y-x^2)\hat{i} + (z-y^2)\hat{j} + (x-z^2)\hat{k}$

της καμπύλης $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$

από το $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$

$$(0,0,0) \downarrow t=0 \qquad (1,1,1) \downarrow t=1$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

(χωρικό σημείο)

$$\vec{F} = (t^2-t^2)\hat{i} + (t^3-t^4)\hat{j} + (t-t^6)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$$

$$W = \int_0^1 \vec{F}\cdot\vec{v}\, dt = \int_0^1 \left[2t\,(t^3-t^4) - 3t^2(t-t^6)\right] dt = \ldots$$

- $\int (M dx + N dy + P dz)$

Αν:

$M = (y-x^2)dx$ αφού $t=x$ και $y=t^2$ $\Rightarrow M = (x^2-x^2)\,dx$

η καμπύλη μου.

- Το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι:

Πόση είναι η ενέργεια, το έργο δηλ. που δαπανούμε για να μετακινήσουμε ένα υλικό σημείο από την επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων;

Το έργο $W = \int_L \vec{F} d\vec{r}$ εξαρτάται όχι μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο αλλά και από την διαδρομή που ακολουθούμε.

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου αυτό δεν ισχύει;

Στην ειδική περίπτωση που το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ καλείται συντηρητικό ή διατηρητικό.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\vec{F}$ ένα πεδίο ορισμένο στο ανοιχτό χωρίο D και A, B δύο τυχαία σημεία του D. Αν το έργο $W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$ είναι το ίδιο για όλες τις διαδρομές από το A στο B, δηλ. είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που επιλέξαμε να ακολουθήσουμε το πεδίο καλείται συντηρητικό ή διατηρητικό στο D.

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε ότι το $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ είναι το πεδίο κλίσης, όπου f μια διαφορίσιμη συνάρτηση που καλείται συνάρτηση δυναμικού τ.ω. από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού να ισχύει:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \underbrace{\vec{\nabla} f \, d\vec{r}}_{\parallel} = f(B) - f(A)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df.$$

Θεώρημα

1) Έστω $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς συνιστώσες σε ένα ανοιχτό χωρίο D. Τότε, υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση f τ.ω.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

<u>αν και μόνο αν</u> για όλα τα σημεία A, B του D το $\int_A^B \vec{F} d\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που

ακολουθούμε για να μεταβούμε από το A στο B

② Αν το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, τότε:

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Άμεση συνέπεια είναι το εξής θεώρημα:

Θεώρημα

Για μια κλειστή διαδρομή στο D :

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \iff \vec{F} \text{ συντηρητικό}$$

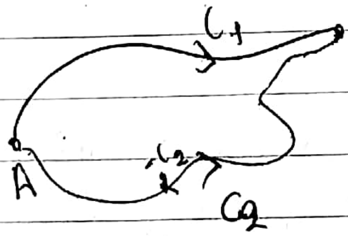
Cauchy - Μιγαδικός

Αν η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι αναλυτική τότε το ολοκλήρωμα μιας οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν

Απόδειξη

(⇒) Έστω ότι το ολοκλήρωμα $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

Τότε επιλέγω όποιους δρόμους θέλω.



Γνωρίζουμε όμως ότι το ολοκλ. σε μία κλειστή διαδρομή είναι:

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\, dr - \int_{C_2} \vec{F}\, dr = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r}}$$

$\Leftarrow$) Αν $\vec{F}$ συντηρητικό τότε $\oint \vec{F} d\vec{r} =$;

$\vec{F}$ συντηρητικό $\Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} f$

Άρα $\oint \vec{F} d\vec{r} = \underbrace{\int_A^B \vec{F} d\vec{r}}_{\text{πήγα}} + \underbrace{\int_B^A \vec{F} d\vec{r}}_{\text{γύρισα}} = f(B) - f(A) + f(A) - f(B) =$

$= 0$.